ДИФФУЗИЯ ПРОЦЕССИНИ КУЗАТИШ МАСАЛАСИ

ЖДПИ п.ф.н., доц. М.Рустамов
ЖДПИ магистратура
2- босқич талабаси Ё.Рустамов

Аннатация: Ушбу мақолада иссиқлик тарқалиши ва диффузия процесси мисолида кузатилувчи жараёнда проекцияни тиклаш; масалани ечиш усулига бағишланган. Яъни аниқ чегаравий масалаларда ва маълум нуқталарда иссиқлиқликнинг ўзгариши аниқ бўлса, бошланғич иссиқлик тарқалиши номаълум ҳол учун иссиқлик тарқалиши ечилган.

Калит сўзлар: *диффузия, проексия,бошланғич шарт, чегаравий шарт, иссиқлик тарқалиши тенгламаси, базис, қўшма масала, бўлаклаб интеграциялаш, тақрибий ечим, фуре коеффиценти.*

1. Нуқтада концентрация ўзгаришини кузатиш орқали диффузия процессида концентрацияни аниқлаш.

Фазода чексиз узунликка эга пластинкалар орасида (агар улар орасидаги масофа S=1 бўлса) диффузия процесси қалинлик ўйналишида рўй берсин. (S ни). У холда процессни пластинкаларга ортогонал жойлашган стержен бўйлаб караш мумкин. S да концентрация t вақт бўйлаб T(x,t) функция орқали ифодалансин. Бунда $(0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \vec{t}), \vec{t}$ −фиксирланган нуқта. У холда $t > 0$ва $[0, 1]$ га T(x, t)функция

$$\frac{\vartheta^2 T(x,t)}{\vartheta T} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \text{ (x,t)}\in\Pi \quad (1)$$

Тенгламага бўйн сунади. Бу ерда a – диффузия коэффициенти. Диффузия процесси каралаетган мухит четларида қуйидаги диффузия шарти қаралади.

$$\mu\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = \alpha[U(t) - T(1,t)],\ t \in [0, \vec{t}],$$

$$\mu\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0,\ t \in [0, \vec{t}]$$

Бу ерда μ - намланганлик коэффиценти, α – намлик ва ташқи мухит орасидаги пропорция коэффиценти. Ташқи мухит концентрацияси бошқарувчи таъсир ёки бошқариш деймиз. (1) ва (2) тенгламалар ечимга эга болиши учун (бир қийматли) яна бошланғич $T(x, 0)$ ёки охирги $T(x, \vec{t})$диффузия холати маълум бўлиши лозим. Аммо ўлчаш асбоблари ёрдамида бу катталикларни ҳамма вақт хам аниқлаб бўлавермайди.

Фараз қилийлик диффузия процессида диффузия холатини мухитнинг баъзи нуқталарида аниклаш имкони бўлсин. $x = \vec{x} \in (0,1]$, $T(\vec{x}, t)$ ни $x = \vec{x}$нуқтада ўзгаришига кўра ва (1) - (2) диффузия қонуни ёрдамида $\vec{t}$ вақтда диффузия холатини аниқлаш бош масала (аниқланиши лозим масала) хисобланади. Куйидаги

$T(\vec{x}, t) = y(t); \ \ t \in [0, \vec{t}]$ (3)

ифодани диффузияни ўлчанадиган катталиги деймиз.

Масала – 1. α, γ, μ – константалар, $y(t)$функция ва (1) – (3) муносабат орқали $T(x, \vec{t})$, $x \in [0,1]$функция аниқлансин.

$q(x)$ – функция$\rho(x) \in \mathrm{C}^1(0,1)$ берилган бўлсин.

Масала – 2. Биринчи масала шартларида

$Z_q = \int_0^1 q(x) \cdot T(x, \vec{t}) dx$ (4)

катталик топилсин. Масала ечими тури $q(x) = q_i(x), i = (1, 2, \dots, h, ..)$базис $Y_2(0,1)$функциялар ёрдамида $T(x, \vec{t})$ ни топиш имконини беради ((4)-проекция ёрдамида). Шу сабабга кўра навбатда фақат 2-масала қараймиз. $\vec{x} = 1$ холатни қарайлик.

2. Проекцияни ўхшатиб олиш (идентификациялаш).

$0 < \vec{x} < 1$деб фараз қилиб, (1) – (3) ифодаларни қаноатлантирувчи (4) ни қуйдаги кўринишга келтирамиз:

$Z_q = \int_0^{\vec{t}} [k(t) y(t) + \varphi(t) u(t)] dt,$ (5)

бу ерда $k(t)$ лар $\varphi(t)$ лар $Y_2\left(0, \vec{t}\right)$дан олинган ҳозирса номаълум функциялар. Чизиқли (тенгламаларда) масалаларда кузатиш назарияси техникаси [2,3] га кўра (K, φ)функционални шундай тенглаймизки, (1) – (3) ифодаларда қуйдаги тенлик бажарилсин.

$\int_0^1 q(x) \cdot T(x, \vec{t}) dx = \int_0^{\vec{t}} [k(t) y(t) + \varphi(t) u(t)] dt$ (6)

(1)нинг ечимларида қуйдаги айниятни хосил қиламиз.

$\int_0^1 \int_0^{\vec{t}} \varphi(x, t) \cdot \left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} - a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial \alpha^2}\right] dx dt \equiv 0$ (7)

Бу ерда $\varphi(x, t)$ихтиёрий функция. $\varphi \in \mathrm{C}_{t,x}^{1,2}(\Pi)$

$$\Pi = \{([0,x]\cdot[0,\vec{t}])\cup([\vec{x},1]\cdot[0,\vec{t}])\}.$$

(6) – ифодани (7) га қўшамиз ва (2), (3) ни хисобга олган холдв бўлаклаб интеграллаймиз. Хосил бўлган ифода қуйидаги қўринишга келади.

$$Z_q = \int_0^1 q(x)\cdot T(x,\vec{t})dx = \int_0^F K(t)\cdot T(\vec{x},t)dx + \int_0^F \varphi(t)u(t)\,dt - \int_0^F \frac{a\alpha}{\lambda}\varphi(1,t)\alpha u(t)dt - \int_0^1 \varphi(x,0)\cdot T(x,0)dx - a\int_0^F \frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial x}T(0,t)dt - a\int_0^F (\frac{\partial\varphi(1,t)}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda}\varphi(1,t))\cdot T(1,t)dt + \int_0^1 \varphi(x,t)\cdot T\big(x,\vec{t}\big)dx - \int_0^1\int_0^F \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x}\right]\cdot T(x,t)dxdt \quad (8)$$

(8) га$T(x,t)$олдидаги коэффицентларини тенглаймиз. Натижада $\varphi(x,t)$ учун қуйдаги система хосил бўлади.

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x,t)\in\Pi(9)$$

$$\varphi(x,0) = 0, \quad (10);$$

$$\varphi\big(x,\vec{t}\big) = 0, x\in[0,1] \quad (11)$$

$$\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial\alpha} = 0,\ \mathrm{t}\in\big[0,\vec{t}\big], \quad (12)$$

$$\frac{a\alpha}{x}\varphi[1,t] + \frac{\partial\varphi(1,t)}{\partial\alpha} = K(t),\ t\in\big[0,\vec{t}\big], \quad (13)$$

Шундай қилиб $\varphi(x,t)$ учун (9)-(13) чегаравий масала хосил бўлади. Бази $K(t)$ га y ечимга эга бўлсин. У холда (8) ифода қуйдаги кўринишни олади:

$$0 = \int_0^F u(t)\cdot\left[\varphi(t) - \frac{a\alpha}{\mu}\varphi(1,t)\right]dx$$

Бу ердан қуйдаги хулосага келамиз: (6) ифодани (1)-(3) ларни қаноатлантирувчи функциялардаги ифодаси ихтиёрий $u(t)$ учун

$$\varphi(t) = \frac{at}{\mu}\varphi(1,t) \quad (14)$$

тенгликнинг бажарилиши етарли.

Теорема: (14) тенликни (1)-(3)ни қаноатлантирувчи ифодаси ўринли бўлиши учун (9)-(13) система ечимга эга булиши зарур.

3.Хисоблаш аспекти.

(9)-(15) масалани ечамиз. (1) – (2) система ечими $T(x,t)M \in L$га қарашли экани маълум бўлсин. $L - Y_2$ (П) даги чизиқли тўплам. $u(t)$ - бошқарув функцияси маълум бўлсин. Баъзи бир $\varphi(t)$ва $K(t)$ маълум функцияларни олайлик. Улар (9) – (11), (14), (15) чегаравий шартлани тақрибан қаноатлантирсин. У холда қуйдаги фарқлар мавжуд бўлсин.

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + a\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} = \tau(x,t), \ \ (x,t) \in \text{П}$$

$$\tilde{\varphi}(x,0) = \tau_0(x), \ \ x \in [0,1]$$

$$\varphi\left(x,\vec{t}\right) = \tau(x), \qquad x \in [0,t],$$

$$\frac{\partial \varphi(0,t)}{\partial x} = \tau^{(0)}, \qquad t \in \left[0,\vec{t}\right],$$

$$\frac{a\alpha}{\lambda}\varphi(1,t) + \frac{\partial \varphi(1,t)}{\partial x} - K(t) = \tau^{(1)}(t), \qquad t \in [0,t]$$

Бу кўринишдаги $\tilde{\varphi}(x,t), \tilde{K}(t)$ларда (16) формулада (8)га кўра қуйдаги хатога эга бўлади.

$R(\tilde{\varphi},K,T) = \int\int \tau(x,t)dxdt + \int_0^{\vec{t}} \tau_0(x)dt + \int_0^{\vec{t}} \tau_1(t)dt + \int_0^{\vec{t}} \tau^{(1)}(t) +$
$\int_0^{\vec{t}} \tau^0(t)dt$ (18)

Шундай қилиб (6) формула аниқлигини ошириш $\tilde{\varphi}, \tilde{K}$ларни танлаш хисобига $R\left(\tilde{\varphi}, \tilde{K}\right)$катталикларни минималлаштириш лозим.

Бу бахони минималлаштиришни амалий усули $L = Y_2$ (П)ва М–П да узлуксиз функциялар тўплами бўлсин. Улар узлуксиз.

$$\frac{\partial T(\tilde{x},t)}{\partial x}, t \in [0,t]$$

хосилага эга бўлиб, (19) ни қаноатлантирсин. Бунда $q_i > 0$оғирлик коэффиценти. Унда (18) хато қуйидагига тенг бўлади

$R\left(\tilde{\varphi}, \tilde{K}\right) = \bar{\bar{C}}\sqrt{J}$ (20)

бу функцияларни $\tilde{\varphi}, \tilde{K}$ бўйича минималлаштириш (20) ни

$$\tilde{K} = \sum_{i=1}^{n} K_i(t)\alpha_i\,, \qquad \tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_i(x)\alpha_j$$

деб минималлаштирамиз. Бунда $K_2(t)$ва $\varphi_2(x,t)$лар берилган базис фукциялар. Яъни $K_2(t)$ва $\varphi_2(x,t)$лар умумлашган кўпхадлар. (18) ни минималлаштириш масаласини хақиқий ўзгарувчи α_i, β_iни $m+n$функция экстремуми билан алмаштирамиз.

$$\min J\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_m,)$$

Бу масалани $m = n, \alpha_i = \beta_i$хол учун ечамиз. (9)ни ечимига ўзгарувчиларни ажратиб қуйдаги функцияларни кўрамиз.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. БутковскийА.Г. теория оптимального управления системани с распределёнными параметрами. М., 1965г.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. 1968.
3. Иванов А.П., Кирин Н.Е., методом наблюдения линейных возмущесмых систем. Диффереииальные уравнения. 1974. Т. 10. №5.
4. Исраилов И., Кирин М.Е., Рустамов М.Д. Задачи пропесса нагрева. Вопросы вычислительной и прикладной математики Ташкент. 1988, вып 84, -166с.5. М.Рустамов.Нуктада иссиклик узгаришини улчаш натижасида берилган иссиклик узгаришини аникдаш усули.САМДУ конфтезю 15.1219.й.