АСИМПТОТИЧЕСКИ НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Камолов Аброр Икромович
Доцент Джизакского филали НУУз
Назиров Жавохир Шодиер Угли
Магистрант 2-курса ДжГПУ

Аннотация: В работе получена асимптотически неулучшаемая оценка приближения одного класса случайных процессов (сл.пр.) линейными положительными операторами (л.п.о.) в метрике пространства L_p.

Ключевые слова: приближение, модуль непрерывности, линейный положительный оператор, асимптотически правильная константа.

Рассматрим приближение класса $\overline{C_\Omega}(R^1)$– всех измеримых , равномерно непрерывных в метрике L_p действительных сл.пр. $\xi(t)$,
$M|\xi(t)|^p \le L < \infty$, $t \in R^1$, $p > 1$, линейным положительным оператором

$$P_n(\xi;t)=\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)dF_t^{(n)}(x) \qquad (1)$$

где

$F_t^{(n)}(x)=P\{\frac{S_n}{n}< x\}$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, $\{X_k\}$, k=1,2,3,…--последовательность независимых, одинаково распределенных (н.о.р) случаных величин (сл.вел.) такая, что $F_t(x)$=P$\{X_1 < x\}$, $MX_1=t$, $M[X_1-t]^2=\sigma^2(t)$, $t \in T \subset R^1$.

Очевидно, что $P_n(\xi;t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$.

Пусть $D \subset T$ - любое компактное множество,

$\omega_\xi(x)=\max\limits_{|t-s|\le x}\{M|\xi(t)-\xi(s)|^p\}^{\frac{1}{p}}$ - модуль непрерывности сл.пр. $\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$.

Из результатов [1], [2] следует ,что $\{M|\xi(t)-P_n(\xi,t)|^2\}^{\frac{1}{2}} \le C\omega_\xi\left({1}/{\sqrt{n}}\right)$

Естественно, наименьшая ("оптимальная") постоянная, которую можно поставит вместо C в правой части этого неравенства

$$C_0=C_0(F_t)=\sup_{\substack{\xi(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1)\\ n\in N}}\left\{\frac{\max\limits_{t\in D}\{M|\xi(t)-P_n(\xi,t)|^p\}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\xi\left({1}/{\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

Вопрос нахождения точного значения оптимальной (“неулучшаемой”) константы C_0 пока остаётся открытой. Вместо нее вычислим асимптотически правильную константу, т. е. величину

$$C_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup_{\xi(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1)} \left\{ \frac{\max_{t\in D}\{ M|\xi(t)-P_n(\xi,t)|^p\}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\xi\left(1/\sqrt{n}\right)} \right\} \right]$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

A_1: $\max\{M|X_1 - t|^3 : t\in D\} \le L < \infty$;

B_1: $\max\{ \sigma^2(t): t\in D\} = \sigma^2(t_0) = \sigma^2 > 0$, $t_0 \in D$.

Теорема 1. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то:

a) для любых $\xi(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ и $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in N$ такое, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеет место соотношение:

$$\max_{t\in D}\{ M|\xi(t) - P_n(\xi,t)|^p\}^{\frac{1}{p}} < [\,æ\,(\sigma) + \varepsilon]\omega_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2)$$

b) неравенство (2) неулучшаемо для класса $\overline{C_\Omega}(R^1)$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1(\varepsilon) \in N$ и сл.пр. $\xi n(t) \in \overline{C_\Omega}(R^1)$ такое, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{t\in D}\{ M|\xi(t) - P_n(\xi n,t)|^p\}^{\frac{1}{p}} > [\,æ\,(\sigma)-\varepsilon]\, \omega_{\xi n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) .$$

Теорема 1.1.2. Если выполнены условия (A_1) и (B_1), то имеет место соотношение:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\sup_{\xi(t)\in\overline{C_\Omega}(R^1)} \left\{ \frac{\max_{t\in D}\{ M|\xi(t)-P_n(\xi,t)|^p\}^{\frac{1}{p}}}{\omega_\xi\left(1/\sqrt{n}\right)} \right\} \right] = æ\,(\sigma) ,$$

где $æ\,(\sigma)=2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\{\Phi[(k+1)/\sigma] - \Phi[k/\sigma]\}$, $\Phi(x)$-стандартная нормальная функция распределения .

Отметим, что задачи о правильной и асиптотически правильной постоянных в оценках приближения л.п.о. (1) были поставлены академиком Азларовым Т.А. в 1984 году.

Постоянная æ (σ) совпадает с асимптотически оптимальной постоянной, найденной другим методом в работе [3] для неслучайных функций.

Список литературы

1. Дрожжина Л.В., О линейной аппроксимации случайных полей. Теория вероятн. и математич. статистика, 1975, вып.13, с. 46-52.
2. Дрожжина Л.В., Совместное приближение случайных процессов и их производных линейными положительными операторами, Доклады АН УССР, А, № 6, с.7-8.
3. Stancu D.D. Approximation of functions by a new klass of linear polinomial operators , Revue roum. Math.pures et appl., 1968, 13, 1173-1194.